Université 20 août 1955 Skikda
Faculté des Sciences
Département d'Informatique
S.Rami

Licence 2 Tronc Commun
Matière : Théorie des Graphes
Année 2023/2024

# Chapitre I *Définitions de Base*

## Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux d'Euler au 18ème siècle pour l'étude de certains problèmes, tels que celui des 7 ponts de Königsberg (les habitants de Königsberg, ville en Russie, se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ).

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble d'éléments en exprimant les relations entre eux.

La théorie des graphes est utilisée dans plusieurs domaines tels que : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, réseaux sociaux, chimie, théorie des langages ….

**Exemple de problèmes : Emploi du temps des examens**

Nous avons 4 matières avec les interactions suivantes : les matières 1 et 2 ont des étudiants en commun ainsi que les matières 1 et 3 et les matières 1 et 4 et les matières 3 et 4.

Le problème qui se pose est comment organisé les examens en un minimum de temps en prenant en considération les matières avec étudiants en commun.

## I- Définitions :

### 1- Définition intuitive :

Un graphe est un ensemble de points reliés (ou non) par des segments.

- Les points sont appelés « sommets » ou « nœuds ».
- Les segments peuvent être :
  - Sans direction : on les appelle « arêtes » et le graphe est « non orienté ». Exemple, un réseau routier dont les routes sont à double sens (voir G1).
  - Avec direction (flèches) : on les appelle « arcs » et le graphe est dit graphe « orienté ». Exemple, un réseau routier dont les routes sont à sens unique (voir G2).

## 2- Définition mathématique :

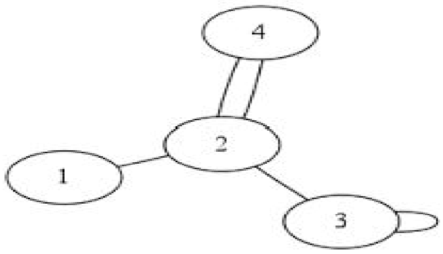
a) **Graphe non orienté :** un graphe G est défini par **G=(X,U)** tel que :

X : l'ensemble des sommets

U: l'ensemble des arêtes. Les arêtes sont des paires non ordonnés de sommets.

**Exemple :** soit G1 = (X,U) tel que X ={1,2,3,4} et

U={u1,u2,u3,u4,u5} avec u1=[1,2], u2=[2,3],u3=[3,3],u4=[2,4],u5=[4,2]




G1

b) **Graphe orienté :** un graphe orienté est défini par **G=(X,U)** tel que :

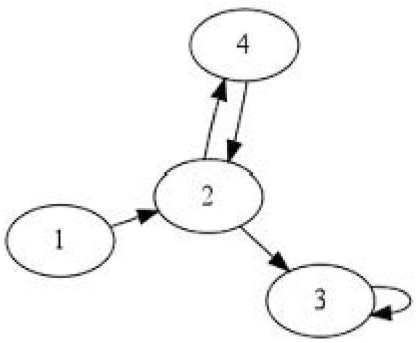
X: l'ensemble des sommets

U : l'ensemble des arcs. Les arcs sont des couples ordonnés des sommets.

**Exemple :** soit G2 = (X,U) tel que

X ={1,2,3,4}

U={u1,u2,u3,u4,u5}avec : u1=(1,2),u2=(2,3),u3=(3,3),u4=(2,4),u5=(4,2)




(G2)

## II- Concepts de base

| Graphe non orienté | Graphe orienté |
|---|---|
| Sommet | Sommet |
| Arête | Arc |
| Chaine | Chemin |
| Cycle | Circuit |

1-**Sommets adjacents** : dans un graphe non orienté (resp. orienté), deux sommets sont adjacents s'il existe une arête (resp. arc) qui les relie.

Exemple : dans les 2 graphes G1 et G2, les deux sommets 1 et 2 sont adjacents et 1 et 3 ne sont pas adjacents.

2- **Arêtes (arcs) adjacentes** si elles ont au moins un sommet en commun (ex, u1 et u2).

3- **Une arête (arc) u est incidente** d'un sommet x si x∈ u (x est une extrémité de u).

4-**Boucle :** est une arête (arc) dont les deux extrémités sont identiques (reliant deux fois le même sommet)(ex, u3 ) .

5- **Arêtes (arcs) multiples :** plus d'une arête (arc) reliant la même paire de sommets.

6- **L'ordre d'un graphe** est le nombre total des sommets qu'il contient ( l'ordre de G1 et G2 est 4).

7- **Le degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes (arcs) qui le relient aux autres sommets du graphe. La boucle comptée 2 fois (ex, dans G1 deg(1)=1, deg(2)=4, deg(3)=3…).

8- **Le degré d'un graphe** est le max des degrés des sommets qu'il contient (le degré de G1 et G2 est 4).

9- **La propriété des poignés de main**s : la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes (arcs). $\sum d\ (x) = 2 \times card(U)$

10- **Chaine (chemin)** : une suite de sommets reliés par des arêtes (arcs). La longueur de la chaîne (chemin) est le nombre d'arêtes (arcs) visitées pour passer du premier sommet de la chaîne (chemin) au dernier.

11- **Chaine (chemin) élémentaire** : on ne passe pas plus d'une fois par le même sommet.

12- **Chaine (chemin) simple** : on ne passe pas plus d'une fois sur la même arête (arc).

13- **Chaine (chemin) fermée :** le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont identiques.

14- **Cycle (circuits) :** chaine (chemin) simple fermée.

15- **Chaîne (chemin) eulérienne** : est une chaîne (chemin) satisfaisant les conditions suivantes :

a. elle contient toutes les arêtes (arcs) du graphe ;

b. chaque arête (arc) n'est décrite qu'une seule fois.

16- **Cycle (circuit) eulérien :** Un cycle (circuit) eulérien est une chaîne (chemin) eulérienne dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes.

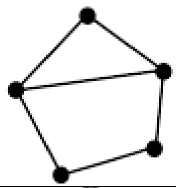
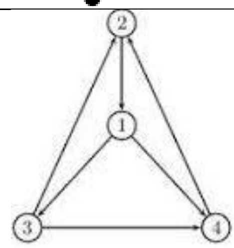
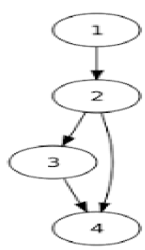
17- **Chaine (chemin) hamiltoniene :** est une chaîne (chemin) satisfaisant les conditions suivantes :

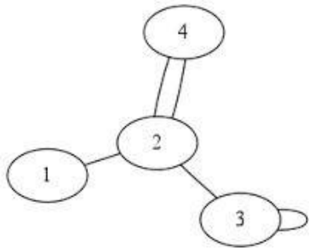
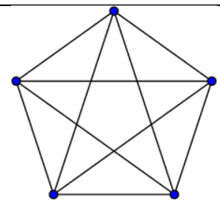
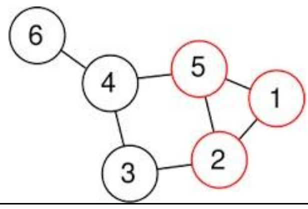
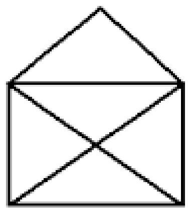
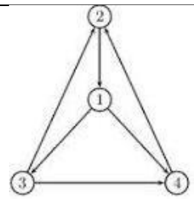
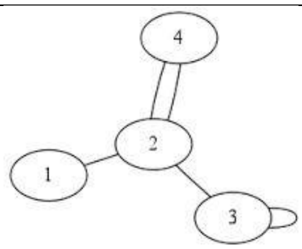
a. elle contient tous les sommets du graphe ;

b. chaque sommet n'est décrit qu'une seule fois (elle ne se compose que de sommets différents).

18- **Cycle(circuit) hamiltonien :** Un cycle (circuit) hamiltonien est une chaîne (chemin) hamiltonienne dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes.

## III- Quelques types de graphes :

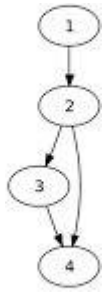
| **Graphe** | **Définition** | **Exemple** |
|---|---|---|
| Graphe planaire | Peut être dessiné sur le plan sans croisement des arêtes (arcs) |  |
| Graphe régulier | tous les sommets ont le même degré. |   |
| Graphe simple | ne contient ni boucles, ni arêtes (arcs) multiples. |   |

| | | |
|---|---|---|
| Multi-graphe | contient des boucles et/ou des arêtes (arcs) multiples. |  |
| Graphe complet | est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents (il a une arête (arc) entre toute paire de sommets). |  |
| Clique dans un graphe | Un sous-graphe complet |  |
| Graphe eulérien | il contient un cycle (circuit) eulérien. Donc, c'est un graphe que l'on peut dessiner sans jamais lever le crayon et sans passer deux fois par la même arête (arc). |  |
| Graphe hamiltonien | il contient un cycle (circuit) hamiltonien. |  |
| Graphe connexe | Il existe une chaine (chemin) entre toute paire de sommets. |  |

## IV- Matrices associées à un graphe

L'objectif des matrices est de réaliser une **représentation informatique** du graphe pour pouvoir le traiter **automatiquement**.

## 1- La matrice d'adjacence




La matrice d'adjacence associée à un graphe G(X,U) d'ordre n est une matrice nxn, tel que l'élément $m_{i,j}$ est définit :

$$m_{i,j} = \begin{cases} \text{le nombre arcs/aretes reliant } (xi \text{ et } xj) \\ 0 \text{ si } (xi, xj) \notin U \end{cases}$$

| Sommet / sommet | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**D'autres Exemples à voir au cours**

<u>RQ :</u>

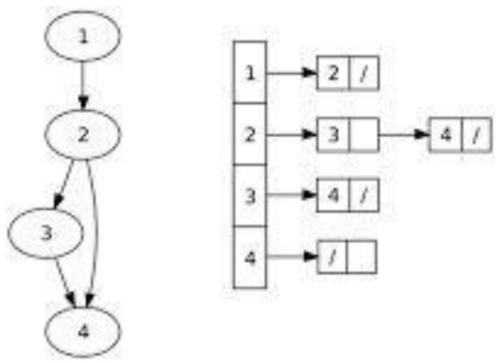
1. Dans le cas d'un graphe simple, la matrice est booléenne et la diagonale est nulle.
2. La matrice associée à un graphe non orienté est toujours une matrice symétrique.
3. On peut retrouver le degré d'un sommet à partir de la matrice d'adjacence d'un graphe.
   - Pour un graphe non orienté sans boucle, il suffit de faire la somme des coefficients sur la ligne (ou sur la colonne) correspondante au sommet,
   - Pour un graphe orienté, on fait la somme sur la ligne et sur la colonne.

     La ligne représente les degrés positifs d+ ( arcs sortants)

     La colonne représente les degrés négatifs d- ( arcs entrants)

4. A partir de la matrice d'adjacence on peut trouver les chaines (chemins) de longueur N entre toute paire de sommets en calculant $M^N$. Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne de $M^N$ est égal au nombre de chaines (chemins) reliant le sommet i du graphe au sommet j.
5. La trace d'une matrice $M^N$ représente le nombres de circuits (cycles ) de longueur N.

## 2- La liste d'adjacence.




Une autre idée pour représenter les matrices en mémoire : les listes d'adjacences. Dans ce type de structure, on a un tableau de liste de sommets. Le tableau comporte autant de cases qu'il y a de sommets. Chacune des cases pointe vers une liste de sommet. Cette liste représente les successeurs du sommet considéré.

**Exemple au cours**

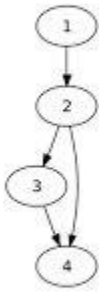
3- **La matrice d'incidence** Soit G un graphe orienté qui possède n sommets numérotés de 1 à n, et m arcs numérotés de 1 à m.

On appelle matrice d'incidence du graphe la matrice MI=($a_{i,j}$) comportant n lignes et m colonnes telle que :

- $a_{i,j}$ vaut +1, si l'arc numéroté j admet le sommet i comme origine;
- $a_{i,j}$ vaut -1, si l'arc numéroté j admet le sommet i comme arrivée;
- $a_{i,j}$ vaut 2 , si l'arc numéroté j est une boucle sur le sommet i
- ai,j vaut 0 dans les autres cas.

a1 : (1,2) a2 : (2,3)

a3 : (2,4) a4 : (3,4)




| Arête (arc) / sommet | a1 | a2 | a3 | a4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | -1 | -1 |

<u>**RQ**</u>.

- Si le graphe est non orienté, il n'y a plus de notion d'origine et d'arrivée d'une arête. On met donc +1 à la place de +1 ou -1, et on met 0 ailleurs.

## V- Connexité :

Un graphe **connexe** est un graphe tel que pour toute paire de sommets ***x*** et ***y*** il existe une **chaîne** ou un **chemin** reliant ***x*** et ***y***.

La notion de connexité est une propriété essentielle des graphes surtout pour les problèmes relatifs aux réseaux (**chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre sommet**).

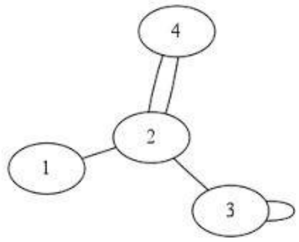
<u>**V.1- Connexité simple :**</u> un graphe est connexe si et seulement si :

$$\forall\, i\,,j\ \in X\ \begin{cases} i = j \\ \exists\ une\ \textbf{chaîne}\ reliant\ i\ et\ j \end{cases} ou$$

Entre tout couple de sommets il est possible de trouver une **chaîne entre ces 2 sommets.**

**RQ :** si un graphe n'est pas connexe il admet au moins 2 composantes connexes.

**Exemple :** G est connexe



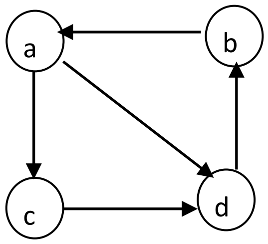

**V.2- Connexité forte :** un graphe est fortement connexe si et seulement si :

$$\forall\, i\,, j\ \in X \begin{cases} i = j \\ \exists\ un\ \textbf{chemin}\ reliant\ i\ et\ j \end{cases} ou$$

Entre tout couple de sommets il y a un **circuit qui passe par ces 2 sommets.**

**RQ :** si un graphe n'est pas fortement connexe il admet au moins 2 composantes fortement connexes.

**Exemple :** G est connexe

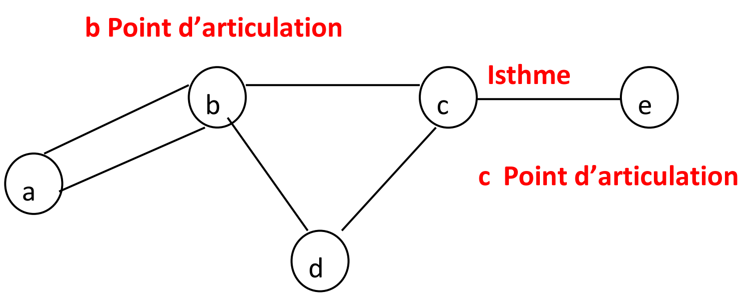



**RQ :** - la relation connexité (simple ou forte) est une relation d'équivalence.

- Un graphe est connexe (ou fortement connexe) si le nombre de ses composantes connexes (ou fortement connexes) est égal à **1**.

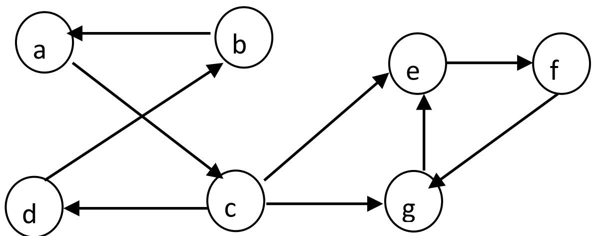
**V.3- Définitions :**

- **Point d'articulation d'un graphe :** est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.
- **Isthme :** est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.
- **Ensemble d'articulation E ⊂ X** d'un graphe connexe **G** est un sous-ensemble de sommets dont la suppression donne un graphe **G'** qui n'est pas connexe.



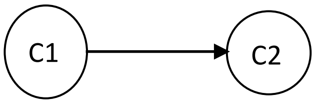
**<u>V.4- Graphe réduit :</u>** soit G=(X,U) un graphe orienté , on appelle graphe réduit $\mathbf{G_R}$ dont les sommets sont $\mathbf{C_1, C_2, \dots}$ les composantes fortement connexes de **G** et il existe un arc entre **Ci** et **Cj** ssi il existe au moins un arc entre un sommet de **Ci** et un sommet de **Cj** dans **G**.

**Exemple :**




Ce graphe n'est pas fortement connexe mais il contient 2 composantes fortement connexes

**C1 = { a,b,c,d }** et **C2 ={e,f,g }** et donne le graphe réduit suivant :




## VI- Parcours d'un graphe :

En utilisant un graphe comme modèle, on a besoin d'un examen des sommets. On peut concevoir cet examen comme une promenade le long des arêtes/arcs au cours de laquelle on visite les sommets.

Le plus souvent, un parcours de graphe est un outil pour étudier une propriété globale du graphe :

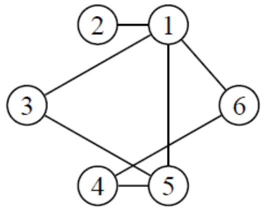
- le graphe est-il connexe ?
- le graphe est-il biparti ?
- le graphe orienté est-il connexe ?
- quels sont les sommets d'articulation ?

On appelle parcours d'un graphe, tout procédé déterministe qui permet de choisir, à partir des sommets visités, le sommet suivant à visiter. Le problème consiste à déterminer un ordre sur les visites des sommets.

Un parcours est une suite S de sommets telle que :

- s est le premier sommet de S
- Chaque sommet apparaît une fois et une seule dans S
- Tout sommet sauf la racine est adjacent à un sommet placé avant lui dans la liste.

**Exemple :**
6 1 4 2 3 5 est un parcours issu de 6




Pour explorer un graphe, il existe deux principales stratégies de parcours :

- Le parcours en profondeur d'abord.
- Le parcours en largeur d'abord.

**Parcours en profondeur d'abord**

Il consiste, à partir d'un sommet donné, à suivre une chaine (chemin) le plus loin possible. Une fois le chemin fini ou lorsque l'on retombe sur un sommet déjà exploré, on fait des retours en arrière pour reprendre toutes les chaines (chemins) ignorées précédemment. Ce type de parcours utilise une pile. Il fonctionne selon l'algorithme suivant :

```
Algorithme Parcours_Graphe_Profondeur
Procédure Parcours_profondeur (G : graphe Variable : s : sommet)
Début
    marquer (s) ← 1;
    Pour  tous les successeurs si de s  faire
    Si non marquer(si) alors
       Parcours_profondeur (si) ;
    Fin SI
     Fin Pour
Fin
```

**Parcours en largeur d'abord**

Il consiste à explorer les sommets du graphe niveau par niveau, à partir d'un sommet donné. Ce type de parcours utilise plutôt une file. Il fonctionne selon l'algorithme suivant:

**Algorithme Parcours_Graphe_Largeur**

<u>**Procédure**</u> **Parcours_largeur (s0 : sommet)**

**Données :** G : graphe

**Variable** : s, suc : sommet, F : file de sommets

<u>**Début**</u>

enfiler(s0,F) ;

marquer (s0) ←1

<u>**TQ**</u> Non_File_vide(F) <u>**faire**</u>

s← défiler(F) ;

<u>**Pour**</u> tout suc adjacent à s <u>**faire**</u>

<u>**Si**</u> **non marquer (suc)** <u>**alors**</u>

marquer (suc) ←1

enfiler(suc,F) ;

<u>**Fin SI**</u>

<u>**Fin Pour**</u>

<u>**Fin TQ**</u>

<u>**Fin**</u>